Esquemas piramidales y porqué deberíamos pagar menos por las naranjas

Diego Martínez Magán

6 de Junio de 2018

Instituto de Ciencias Matemáticas - Universidad Carlos III de Madrid
lumartin@math.uc3m.es
luisdiego.martinez@icmat.es

Disclaimer

- 3 tipos de presentaciones:

Disclaimer

- 3 tipos de presentaciones:
  1. Inteligentes
  2. Graciosas
  3. Bonitas

Disclaimer

- 3 tipos de presentaciones:
  1. Inteligentes
  2. Graciosas
  3. Bonitas

  Y bien bonicas que son las trasparencias

Disclaimer

- 3 tipos de presentaciones:
    1. Inteligentes
    2. Graciosas
    3. Bonitas

  Y bien bonicas que son las trasparencias
- Todo es cierto...

Disclaimer

- 3 tipos de presentaciones:
    1. Inteligentes
    2. Graciosas
    3. Bonitas

  Y bien bonicas que son las trasparencias
- Todo es cierto... Salvo alguna cosa

Disclaimer

- 3 tipos de presentaciones:
  1. Inteligentes
  2. Graciosas
  3. Bonitas

  Y bien bonicas que son las trasparencias
- Todo es cierto... Salvo alguna cosa
- El Axioma de Elección es bueno

Overview

Esquemas Piramidales y de Ponzi

Figure 1: Charles Ponzi (1882 - 1949)

Ponzi & los esquemas piramidales I

Figure 1: Charles Ponzi (1882 - 1949)

Idea: dar dinero y recibir más dinero rápido

Ponzi & los esquemas piramidales I

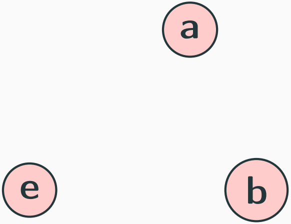
Figure 1: Charles Ponzi (1882 - 1949)

Idea: dar dinero y <u>recibir más dinero</u> rápido ($= \$ \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \$\$$)

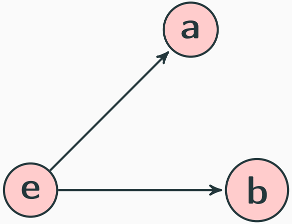
Ponzi & los esquemas piramidales II

e

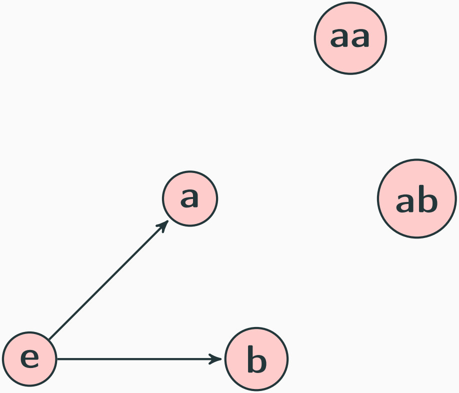
Ponzi & los esquemas piramidales II



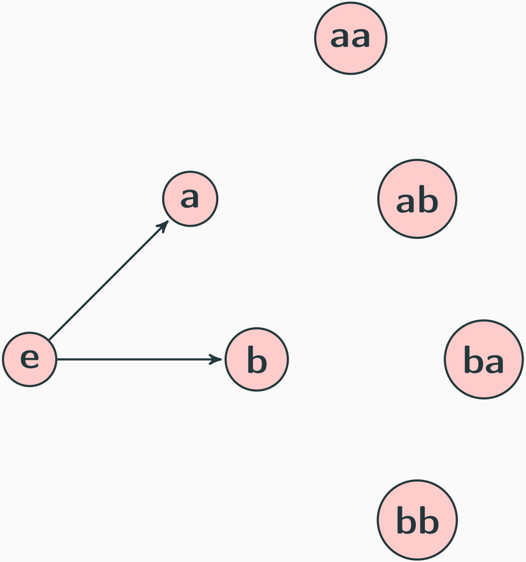
Ponzi & los esquemas piramidales II



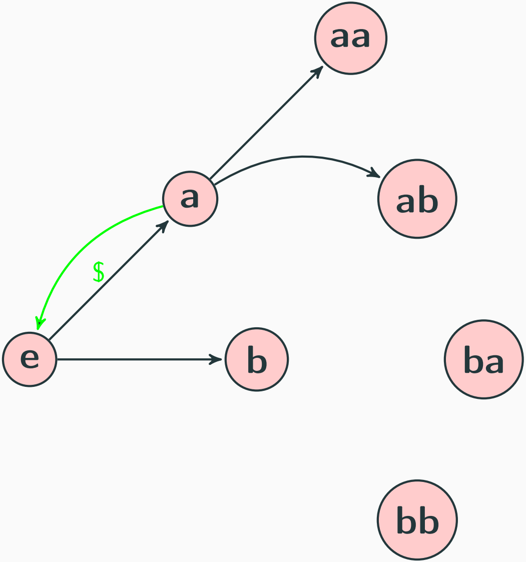
Ponzi & los esquemas piramidales II



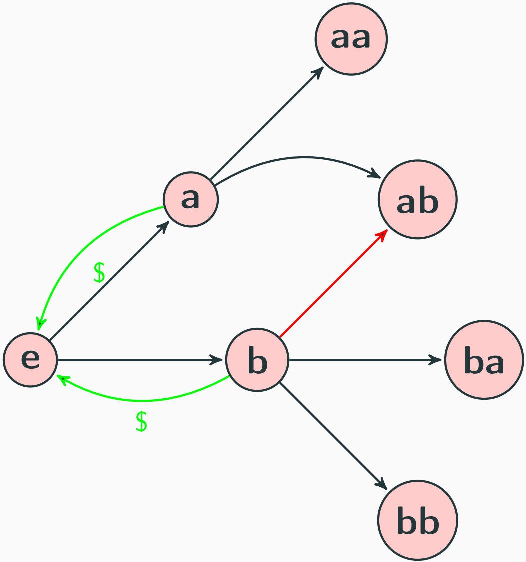
Ponzi & los esquemas piramidales II



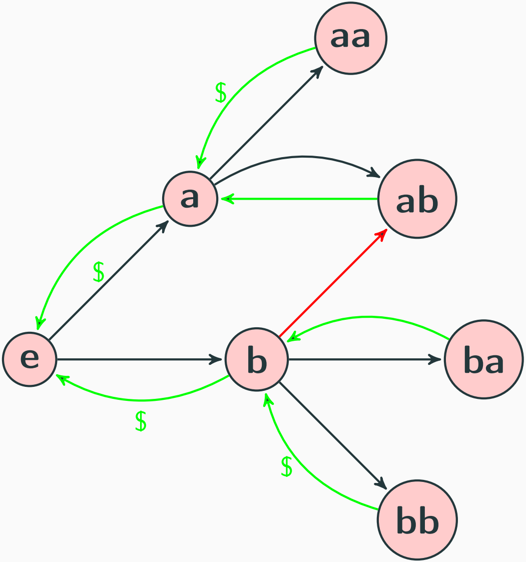
Ponzi & los esquemas piramidales II



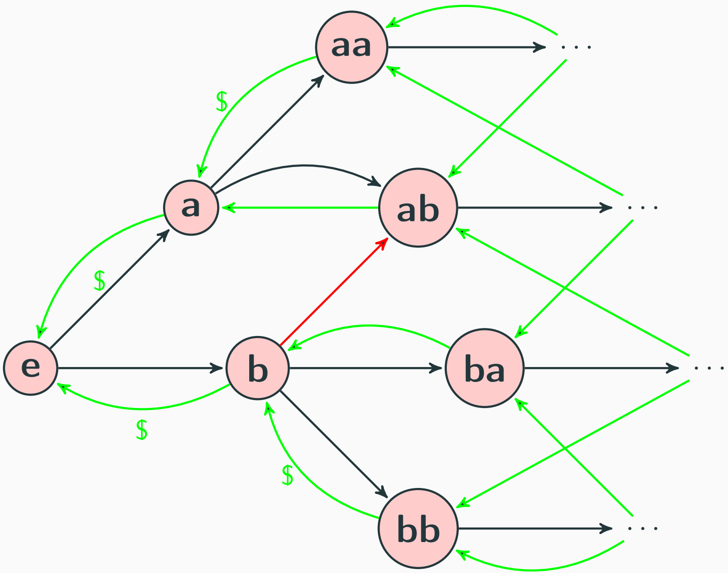
Ponzi & los esquemas piramidales II



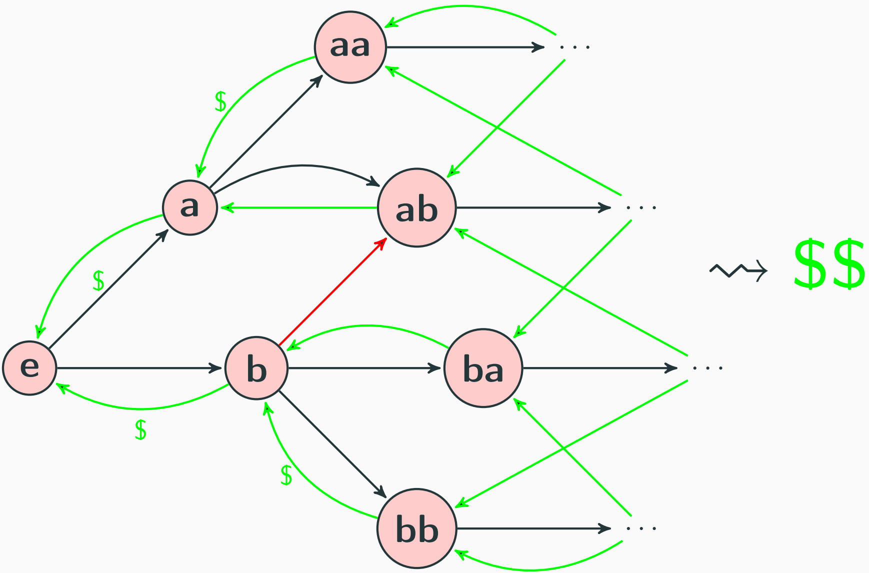
Ponzi & los esquemas piramidales II



Ponzi & los esquemas piramidales II



Ponzi & los esquemas piramidales II



Peerooooo... ¿?

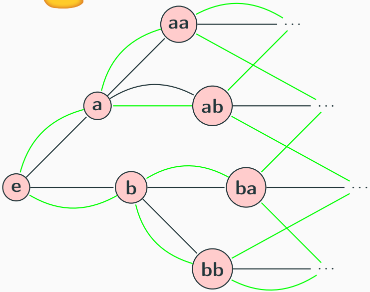
Peerooooo... ¿?

Warning: 7.625.649.941 habitantes
(14:41 del 30 de Mayo 2018, worldometers.info)

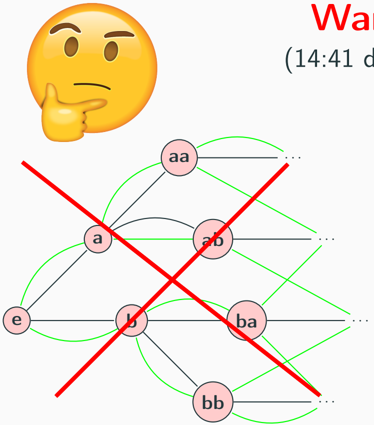
Peerooooo... ¿?

Warning: 7.625.649.941 habitantes

(14:41 del 30 de Mayo 2018, worldometers.info)



Peeroooo... ¿?



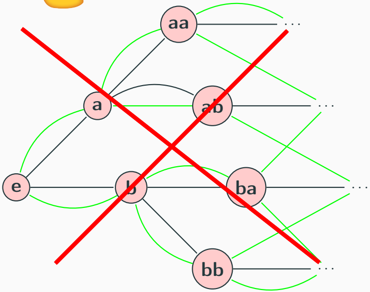
Warning: 7.625.649.941 habitantes

(14:41 del 30 de Mayo 2018, worldometers.info)

Peerooooo... ¿?

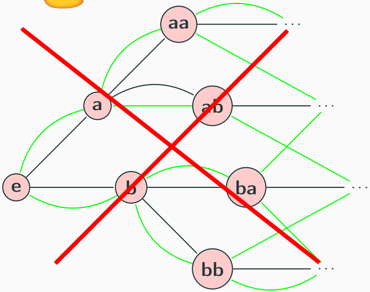
Warning: 7.625.649.941 habitantes

(14:41 del 30 de Mayo 2018, worldometers.info)



$\rightsquigarrow$

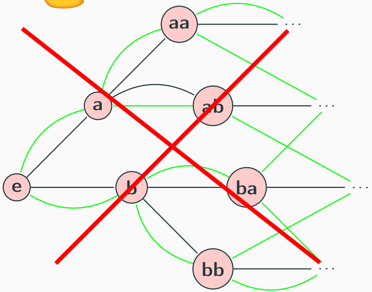
Warning: 7.625.649.941 habitantes
(14:41 del 30 de Mayo 2018, worldometers.info)



$\rightsquigarrow$

Peerooooo... ¿?

Warning: 7.625.649.941 habitantes
(14:41 del 30 de Mayo 2018, worldometers.info)

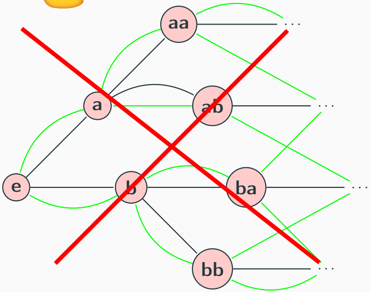


$\rightsquigarrow$

... mientras que ...

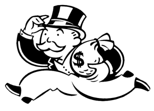
Peerooooo... ¿?

Warning: 7.625.649.941 habitantes
(14:41 del 30 de Mayo 2018, worldometers.info)



$\rightsquigarrow$

... mientras que ...



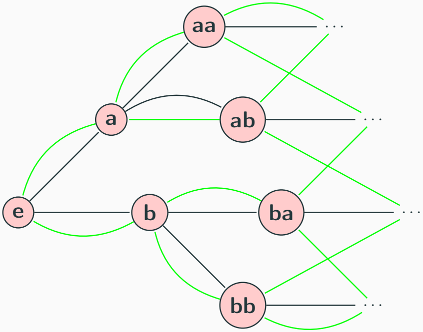
¿Y si...?

¿Y si...?

- ¿Y si hubiera ∞ personas en La Tierra? Entonces...

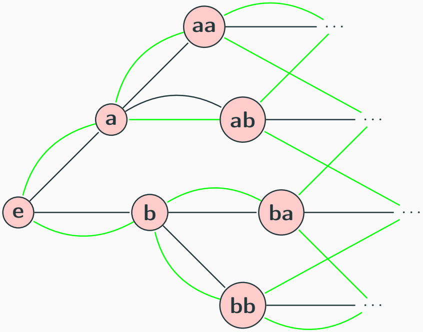
¿Y si...?

- ¿Y si hubiera ∞ personas en La Tierra? Entonces...



¿Y si...?

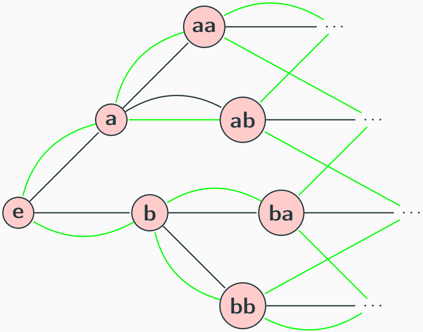
- ¿Y si hubiera ∞ personas en La Tierra? Entonces...



¡Funcionaría!

¿Y si...?

- ¿Y si hubiera ∞ personas en La Tierra? Entonces...

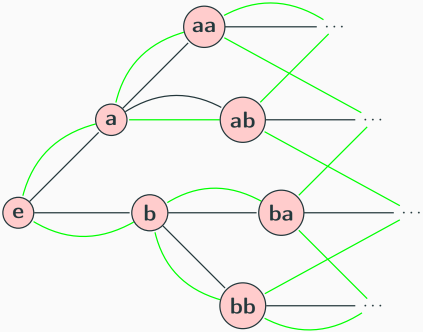


¡Funcionaría!

- ¿Y si la gente no se conociera así? Entonces...

¿Y si...?

- ¿Y si hubiera ∞ personas en La Tierra? Entonces...

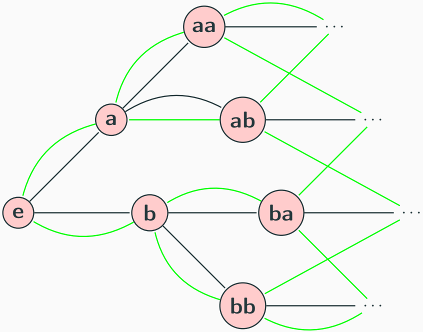


¡Funcionaría!

- ¿Y si la gente no se conociera así? Entonces...

¿Y si...?

- ¿Y si hubiera ∞ personas en La Tierra? Entonces...



¡Funcionaría!

- ¿Y si la gente no se conociera así? Entonces...

podría ser que sólo *e* ganara...

Definición

Esquema piramidal exitoso en (V, E) loc. aco. es $\phi : V \to V$:

Ponzi & los esquemas piramidales III

Definición

Esquema piramidal exitoso en (V, E) loc. aco. es $\phi : V \to V$:

1. Si $w \in V$ entonces $\left|\phi^{-1}(w)\right| \geq 2$.

Definición

Esquema piramidal exitoso en (V, E) loc. aco. es $\phi : V \to V$:

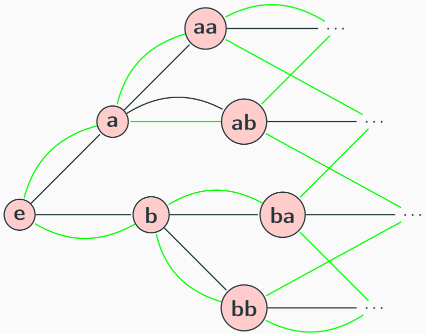
1. Si $w \in V$ entonces $\left|\phi^{-1}(w)\right| \geq 2$.
2. $(v, \phi(v)) \in E$ para todo $v \in V$.

Ponzi & los esquemas piramidales III

Definición

<u>Esquema piramidal exitoso</u> en (V,E) loc. aco. es $\phi : V \to V$:

1. Si $w \in V$ entonces $\left|\phi^{-1}(w)\right| \geq 2$.
2. $(v, \phi(v)) \in E$ para todo $v \in V$.

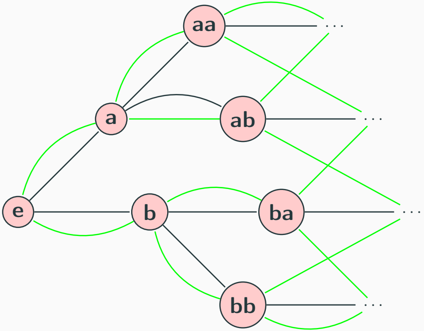


Ponzi & los esquemas piramidales III

Definición

Esquema piramidal exitoso en (V, E) loc. aco. es $\phi : V \to V$:

1. Si $w \in V$ entonces $\left|\phi^{-1}(w)\right| \geq 2$.
2. $(v, \phi(v)) \in E$ para todo $v \in V$.



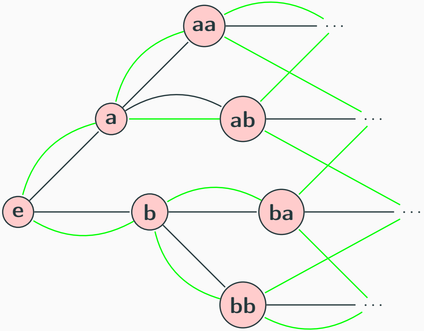
vs.

Ponzi & los esquemas piramidales III

Definición

Esquema piramidal exitoso en (V, E) loc. aco. es $\phi : V \to V$:

1. Si $w \in V$ entonces $\left|\phi^{-1}(w)\right| \geq 2$.
2. $(v, \phi(v)) \in E$ para todo $v \in V$.



vs.

Ponzi & los esquemas piramidales IV

Observaciones:

1. $\mathcal{K}_n$ no tiene un esquema piramidal exitoso.

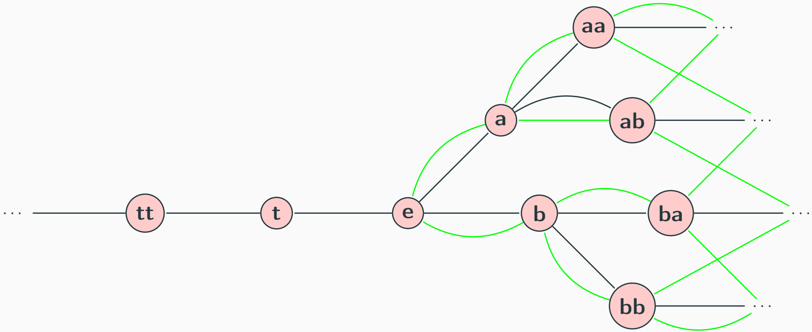
Observaciones:

1. $\mathcal{K}_n$ no tiene un esquema piramidal exitoso.
2. $|V| < \infty \rightsquigarrow (V, E)$ no tiene un esquema piramidal exitoso.

Ponzi & los esquemas piramidales IV

Observaciones:

1. $\mathcal{K}_n$ no tiene un esquema piramidal exitoso.
2. $|V| < \infty \rightsquigarrow (V, E)$ no tiene un esquema piramidal exitoso.
3. Existen "esquemas exitosos parciales":



Paradojicidad en grupos

Lebesgue vs. Vitali I

Figure 2: Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Figure 3: Giuseppe Vitali (1875-1932)

Lebesgue vs. Vitali I

Figure 2: Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Idea: medir conjuntos en $\mathbb{R}$

Figure 3: Giuseppe Vitali (1875-1932)

Figure 2: Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Idea: medir conjuntos en $\mathbb{R}$

Figure 3: Giuseppe Vitali (1875-1932)

Idea: no podemos medirlo todo

Lebesgue vs. Vitali II

Definición

La medida de Lebesgue es $\lambda : \mathcal{L}\left(\subset \mathcal{P}\left([0,1]\right)\right) \to [0,1]$

$$\lambda\left(E\right) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(I_i\right) \ : I_i \text{ intervalos y } E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

Definición

La medida de Lebesgue es $\lambda : \mathcal{L}\left(\subset \mathcal{P}\left([0,1]\right)\right) \to [0,1]$

$$\lambda\left(E\right) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(I_i\right) \ : I_i \text{ intervalos y } E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

Propiedades:

1. Normalización: $\lambda\left(\emptyset\right) = 0$ y $\lambda\left([0,1]\right) = 1$.
2. σ-aditividad: $\lambda\left(\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\left(A_i\right)$.
3. Invariancia: $\lambda\left(r + E\right) = \lambda\left(E\right)$.

Lebesgue vs. Vitali II

Definición

La medida de Lebesgue es $\lambda : \mathcal{L}\left(\subset \mathcal{P}\left([0,1]\right)\right) \to [0,1]$

$$\lambda\left(E\right) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(I_i\right)\ :\ I_i \text{ intervalos y } E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

Propiedades:

1. Normalización: $\lambda\left(\emptyset\right) = 0$ y $\lambda\left([0,1]\right) = 1$.
2. σ-aditividad: $\lambda\left(\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\left(A_i\right)$.
3. Invariancia: $\lambda\left(r + E\right) = \lambda\left(E\right)$.
4. **Warning:** $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}\left([0,1]\right)$.

$$\mathbb{Q} \triangleleft \mathbb{R} \ \rightsquigarrow\ \mathbb{R}/\mathbb{Q} \ \rightsquigarrow\ V = \{1 \text{ representante de cada } [0,1] / [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

$$1 = \lambda\left([0,1]\right) \leq \lambda\left(\sqcup_{q\in\mathbb{Q}} V + q\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda\left(V + q\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda\left(V\right) \leq 3$$

Definición

La medida de Lebesgue es $\lambda : \mathcal{L}\left(\subset \mathcal{P}\left([0,1]\right)\right) \to [0,1]$

$$\lambda(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \ : I_i \text{ intervalos y } E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

Propiedades:

1. Normalización: $\lambda(\emptyset) = 0$ y $\lambda([0,1]) = 1$.
2. σ-aditividad: $\lambda\left(\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$.
3. Invariancia: $\lambda(r+E) = \lambda(E)$.
4. **Warning:** $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}([0,1])$.

$$\mathbb{Q} \lhd \mathbb{R} \ \rightsquigarrow \ \mathbb{R}/\mathbb{Q} \ \rightsquigarrow \ V = \{1 \text{ representante de cada } [0,1]\,/\,[0,1] \cap \mathbb{Q}$$

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda\left(\sqcup_{q\in\mathbb{Q}} V + q\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(V+q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(V) \leq 3$$

Paradojicidad en grupos

Definición

G (grupo discreto contable) es paradójico si existen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset G$ y $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tales que:

1. $G \supset A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m$.
2. $G = g_1 A_1 \cup \cdots \cup g_n A_n = h_1 B_1 \cup \cdots \cup h_m B_m$.

Paradojicidad en grupos

Definición

G (grupo discreto contable) es <u>paradójico</u> si existen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subset G$ y $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que:

1. $G \supset A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m$.
2. $G = g_1 A_1 \cup \cdots \cup g_n A_n = h_1 B_1 \cup \cdots \cup h_m B_m$.

$|G| < \infty$ & $\mathbb{Z}$ & G abeliano no son paradójicos vs. $\mathbb{F}_2$ sí lo es.

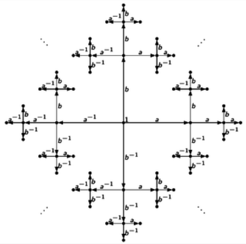
Paradojicidad en grupos

Definición

G (grupo discreto contable) es <u>paradójico</u> si existen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subset G$ y $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que:

1. $G \supset A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m$.
2. $G = g_1 A_1 \cup \cdots \cup g_n A_n = h_1 B_1 \cup \cdots \cup h_m B_m$.

$|G| < \infty$ & $\mathbb{Z}$ & G abeliano no son paradójicos vs. $\mathbb{F}_2$ sí lo es.



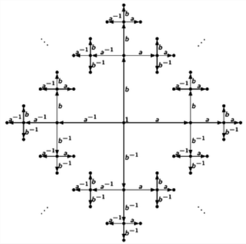
Paradojicidad en grupos

Definición

G (grupo discreto contable) es <u>paradójico</u> si existen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset G$ y $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tales que:

1. $G \supset A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m$.
2. $G = g_1 A_1 \cup \cdots \cup g_n A_n = h_1 B_1 \cup \cdots \cup h_m B_m$.

$|G| < \infty$ & $\mathbb{Z}$ & G abeliano no son paradójicos vs. $\mathbb{F}_2$ sí lo es.



$\rightsquigarrow$

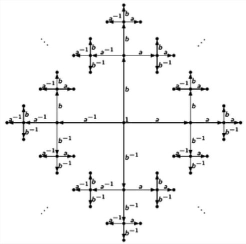
Paradojicidad en grupos

Definición

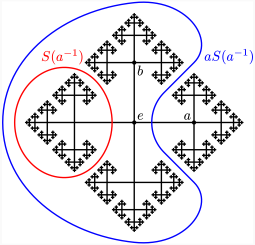
G (grupo discreto contable) es paradójico si existen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subset G$ y $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que:

1. $G \supset A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m$.
2. $G = g_1 A_1 \cup \cdots \cup g_n A_n = h_1 B_1 \cup \cdots \cup h_m B_m$.

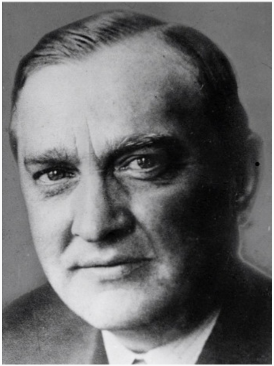
$|G| < \infty$ & $\mathbb{Z}$ & G abeliano no son paradójicos vs. $\mathbb{F}_2$ sí lo es.



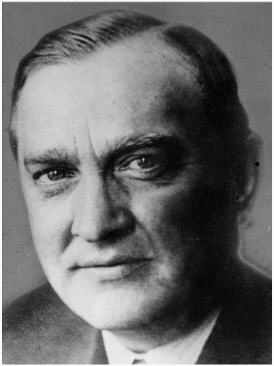
$\rightsquigarrow$



Banach-Tarski & Hausdorff I



Banach-Tarski & Hausdorff I



Idea: (Banach & Tarski) debilitar σ-aditividad $\rightsquigarrow$ ¿Conjuntos no medibles?

Banach-Tarski & Hausdorff II

Observación: $\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{SO}(3)$:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \psi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Banach-Tarski & Hausdorff II

Observación: $\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{SO}(3)$:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \psi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\mathbb{F}_2$ es paradójico & $\mathbb{F}_2 \curvearrowright \mathbb{S}^2$.

Lema

G paradójico & $G \curvearrowright X$ sin puntos fijos $\Rightarrow$ X G-paradójico.

Proposición (Paradoja de Hausdorff)

Observación: $\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{SO}(3)$:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \psi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\mathbb{F}_2$ es paradójico & $\mathbb{F}_2 \curvearrowright \mathbb{S}^2$.

Lema

G paradójico & $G \curvearrowright X$ sin puntos fijos $\Rightarrow$ X G-paradójico.

Proposición (Paradoja de Hausdorff)

$\exists\, D \subset \mathbb{S}^2$ contable con $\mathbb{S}^2 \setminus D$ $\mathrm{SO}(3)$-paradójico.

Banach-Tarski & Hausdorff II

Observación: $\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{SO}(3)$:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \psi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\mathbb{F}_2$ es paradójico & $\mathbb{F}_2 \curvearrowright \mathbb{S}^2$.

Lema

G paradójico & $G \curvearrowright X$ sin puntos fijos $\Rightarrow X$ G-paradójico.

Proposición (Paradoja de Hausdorff)

$\exists\, D \subset \mathbb{S}^2$ contable con $\mathbb{S}^2 \setminus D$ $\mathrm{SO}(3)$-paradójico.

Prueba (sketch): $F :=$ puntos fijos de $\mathbb{F}_2 \curvearrowright \mathbb{S}^2$

$$\rightsquigarrow D := \cup_{w \in \mathbb{F}_2} wF \quad + \quad \text{Lema.}$$

Banach-Tarski & Hausdorff III

Teorema (Paradoja de Banach-Tarski)

$\mathbb{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ es $\mathrm{SO}(3)$-paradójica.

Teorema (Paradoja de Banach-Tarski)

$\mathbb{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ es SO (3)-paradójica.

Prueba (sketch):

BT = Paradoja de Hausdorff

+ "conjuntos finitos no importan en la descomposición"

+ conos a partir de la descomposición en la superficie

Teorema (Paradoja de Banach-Tarski)

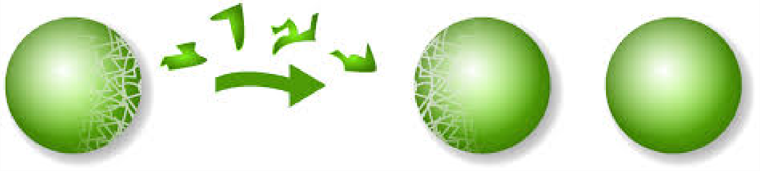
$\mathbb{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ es $\mathrm{SO}(3)$-paradójica.

Prueba (sketch):

BT = Paradoja de Hausdorff

+ "conjuntos finitos no importan en la descomposición"

+ conos a partir de la descomposición en la superficie



Observaciones:

Observaciones:

1. Paradoja *fuerte* $\rightsquigarrow$ todo $A \subset \mathbb{R}^3$ con interior $\neq \emptyset$ es SO (3)-paradójico.

Observaciones:

1. Paradoja *fuerte* $\rightsquigarrow$ todo $A \subset \mathbb{R}^3$ con interior $\neq \emptyset$ es $\mathrm{SO}(3)$-paradójico.
2. Existen conjuntos $\subset \mathbb{R}^3$ no medibles (¡incluso **sin** σ-aditividad!)

Observaciones:

1. Paradoja *fuerte* $\rightsquigarrow$ todo $A \subset \mathbb{R}^3$ con interior $\neq \emptyset$ es $\mathrm{SO}(3)$-paradójico.
2. Existen conjuntos $\subset \mathbb{R}^3$ no medibles (¡incluso **sin** σ-aditividad!)
3. $n > 3 \rightsquigarrow$ misma prueba $\rightsquigarrow$ conjuntos no medibles.

Observaciones:

1. Paradoja *fuerte* $\rightsquigarrow$ todo $A \subset \mathbb{R}^3$ con interior $\neq \emptyset$ es SO (3)-paradójico.
2. Existen conjuntos $\subset \mathbb{R}^3$ no medibles (¡incluso **sin** σ-aditividad!)
3. $n > 3 \rightsquigarrow$ misma prueba $\rightsquigarrow$ conjuntos no medibles.
4. $n = 1, 2 \rightsquigarrow \mathrm{SO}\,(n)$ abeliano $\rightsquigarrow$ bola no paradójica.

Observaciones:

1. Paradoja *fuerte* $\rightsquigarrow$ todo $A \subset \mathbb{R}^3$ con interior $\neq \emptyset$ es $\mathrm{SO}(3)$-paradójico.
2. Existen conjuntos $\subset \mathbb{R}^3$ no medibles (¡incluso **sin** σ-aditividad!)
3. $n > 3 \rightsquigarrow$ misma prueba $\rightsquigarrow$ conjuntos no medibles.
4. $n = 1, 2 \rightsquigarrow \mathrm{SO}(n)$ abeliano $\rightsquigarrow$ bola no paradójica.
5. $n = 1, 2 \rightsquigarrow$ existen medidas totales extendiendo Lebesgue.

Amenabilidad y von Neumann

von Neumann

von Neumann

Idea: Banach-Tarski vs. Medidas $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0, 1]$.

Amenabilidad

Definición

Una <u>medida de probabilidad invariante</u> es $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ cumpliendo:

1. Normalización: $\mu(G) = 1$.
2. Aditividad finita: $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Invariancia: $\mu(gA) = \mu(A)$.

G es <u>amenable</u> si tiene una medida de probabilidad invariante.

Definición

Una medida de probabilidad invariante es $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0, 1]$ cumpliendo:

1. Normalización: $\mu(G) = 1$.
2. Aditividad finita: $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Invariancia: $\mu(gA) = \mu(A)$.

G es amenable si tiene una medida de probabilidad invariante.

Ejemplos: G finito & $\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $\mu(A) = \lim_{n\to\omega} |A \cap [-n, n]| / 2n + 1$.

Definición

Una medida de probabilidad invariante es $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ cumpliendo:

1. Normalización: $\mu(G) = 1$.
2. Aditividad finita: $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Invariancia: $\mu(gA) = \mu(A)$.

G es amenable si tiene una medida de probabilidad invariante.

Ejemplos: G finito & $\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $\mu(A) = \lim_{n\to\omega} |A \cap [-n,n]| / 2n+1$.

No ejemplo: $\mathbb{F}_2 \rightsquigarrow A := S(a) \cup S\left(a^{-1}\right) \rightsquigarrow$

Definición

Una medida de probabilidad invariante es $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ cumpliendo:

1. Normalización: $\mu(G) = 1$.
2. Aditividad finita: $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Invariancia: $\mu(gA) = \mu(A)$.

G es amenable si tiene una medida de probabilidad invariante.

Ejemplos: G finito & $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mu(A) = \lim_{n\to\omega} |A \cap [-n,n]| / 2n+1$.

No ejemplo: $\mathbb{F}_2 \rightsquigarrow A := S(a) \cup S\left(a^{-1}\right) \rightsquigarrow$

1. $A \cup aA = \mathbb{F}_2 \rightsquigarrow \mu(A) \geq 1/2$.
2. A, bA, b^2A son disjuntos $\rightsquigarrow \mu(A) \leq 1/3$.

Naranjas vs. Estafas

Naranjas vs. Estafas I

Teorema (Banach-Tarski, von Neumann)

G grupo discreto, finitamente generado. LSASE:

1. G es paradójico.
2. G no es amenable.
3. Existe $K \subset G$ finito tal que $\mathrm{Cay}(G, K)$ tiene un EPE.

Naranjas vs. Estafas I

Teorema (Banach-Tarski, von Neumann)

G grupo discreto, finitamente generado. LSASE:

1. G es paradójico.
2. G no es amenable.
3. Existe $K \subset G$ finito tal que $\mathrm{Cay}(G, K)$ tiene un EPE.

Prueba (sketch):

Teorema (Banach-Tarski, von Neumann)

G grupo discreto, finitamente generado. LSASE:

1. G es paradójico.
2. G no es amenable.
3. Existe $K \subset G$ finito tal que $\mathrm{Cay}(G, K)$ tiene un EPE.

Prueba (sketch):

$\underline{3 \Rightarrow 1}$. Escoger ψ_i tal que $\phi(\psi_i(g)) = g$ $(i = 1, 2) \rightsquigarrow$ para $k \in K$

$$A_k = \left\{g \in G : \psi_1(g)\, g^{-1} = k\right\} \quad \& \quad B_k = \left\{g \in G : \psi_2(g)\, g^{-1} = k\right\}.$$

Teorema (Banach-Tarski, von Neumann)

G grupo discreto, finitamente generado. LSASE:

1. G es paradójico.
2. G no es amenable.
3. Existe $K \subset G$ finito tal que $\mathrm{Cay}(G, K)$ tiene un EPE.

Prueba (sketch):

$\underline{3 \Rightarrow 1}$. Escoger ψ_i tal que $\phi(\psi_i(g)) = g$ $(i = 1, 2)$ $\rightsquigarrow$ para $k \in K$

$A_k = \left\{g \in G : \psi_1(g) g^{-1} = k\right\}$ & $B_k = \left\{g \in G : \psi_2(g) g^{-1} = k\right\}$.

$\rightarrow (g, \phi(g)) \in E$

Teorema (Banach-Tarski, von Neumann)

G grupo discreto, finitamente generado. LSASE:

1. G es paradójico.
2. G no es amenable.
3. Existe $K \subset G$ finito tal que $\mathrm{Cay}(G, K)$ tiene un EPE.

Prueba (sketch):

$\underline{3 \Rightarrow 1}$. Escoger ψ_i tal que $\phi(\psi_i(g)) = g$ $(i = 1, 2) \rightsquigarrow$ para $k \in K$

$A_k = \left\{g \in G : \psi_1(g)\, g^{-1} = k\right\} \quad \& \quad B_k = \left\{g \in G : \psi_2(g)\, g^{-1} = k\right\}.$

$\to (g, \phi(g)) \in E \rightsquigarrow \psi_i(g)\, g^{-1} \in K$

Teorema (Banach-Tarski, von Neumann)

G grupo discreto, finitamente generado. LSASE:

1. G es paradójico.
2. G no es amenable.
3. Existe $K \subset G$ finito tal que $\mathrm{Cay}(G, K)$ tiene un EPE.

Prueba (sketch):

$\underline{3 \Rightarrow 1}$. Escoger ψ_i tal que $\phi(\psi_i(g)) = g\ (i = 1, 2) \rightsquigarrow$ para $k \in K$

$A_k = \{g \in G : \psi_1(g)\, g^{-1} = k\} \quad \& \quad B_k = \{g \in G : \psi_2(g)\, g^{-1} = k\}$.

$\to (g, \phi(g)) \in E \rightsquigarrow \psi_i(g)\, g^{-1} \in K \rightsquigarrow \underline{G = \sqcup_{k \in K} A_k = \sqcup_{k \in K} B_k}$.

Teorema (Banach-Tarski, von Neumann)

G grupo discreto, finitamente generado. LSASE:

1. G es paradójico.
2. G no es amenable.
3. Existe $K \subset G$ finito tal que $\mathrm{Cay}(G, K)$ tiene un EPE.

Prueba (sketch):

$\underline{3 \Rightarrow 1}$. Escoger ψ_i tal que $\phi(\psi_i(g)) = g \ (i = 1, 2) \rightsquigarrow$ para $k \in K$

$A_k = \left\{g \in G : \psi_1(g) g^{-1} = k\right\} \quad \& \quad B_k = \left\{g \in G : \psi_2(g) g^{-1} = k\right\}.$

$\rightarrow (g, \phi(g)) \in E \rightsquigarrow \psi_i(g) g^{-1} \in K \rightsquigarrow \underline{G = \sqcup_{k \in K} A_k = \sqcup_{k \in K} B_k}.$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \sqcup_{k \in K} kA_k = \psi_1(G) \\ \rightarrow \sqcup_{k \in K} kB_k = \psi_2(G) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \underline{\sqcup_{k \in K} (kA_k \sqcup kB_k) \subset G.}$$

Naranjas vs. Estafas II

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Si fuera paradójico y amenable:

$$
\begin{aligned}
1 = \mu(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j B_j) \geq \mu(G) + \mu(G) = 2.
\end{aligned}
$$

Naranjas vs. Estafas II

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Si fuera paradójico y amenable:

$$\begin{aligned} 1 = \mu(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j B_j) \geq \mu(G) + \mu(G) = 2. \end{aligned}$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. No amenable

Naranjas vs. Estafas II

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Si fuera paradójico y amenable:

$$
\begin{aligned}
1 = \mu(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j B_j) \geq \mu(G) + \mu(G) = 2.
\end{aligned}
$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. No amenable

$\rightsquigarrow$ existe $e \in K \subset G$ con $|KF| \geq 2|F|$

Naranjas vs. Estafas II

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Si fuera paradójico y amenable:

$$\begin{aligned} 1 = \mu(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j B_j) \geq \mu(G) + \mu(G) = 2. \end{aligned}$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. No amenable

$\rightsquigarrow$ existe $e \in K \subset G$ con $|KF| \geq 2|F|$

$+$ Hall harem Theorem

Naranjas vs. Estafas II

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Si fuera paradójico y amenable:

$$\begin{aligned}1 = \mu(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j B_j) \geq \mu(G) + \mu(G) = 2.\end{aligned}$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. No amenable

$\rightsquigarrow$ existe $e \in K \subset G$ con $|KF| \geq 2|F|$

$+$ Hall harem Theorem

$\rightsquigarrow$ etiquetas $\left\{g_{(t,i)}\right\}_{(t,i) \in G \times \{1,2\}}$

Naranjas vs. Estafas II

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Si fuera paradójico y amenable:

$$\begin{aligned} 1 = \mu(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j B_j) \geq \mu(G) + \mu(G) = 2. \end{aligned}$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. No amenable

$\rightsquigarrow$ existe $e \in K \subset G$ con $|KF| \geq 2|F|$

$+$ Hall harem Theorem

$\rightsquigarrow$ etiquetas $\left\{g_{(t,i)}\right\}_{(t,i) \in G \times \{1,2\}}$

$\rightsquigarrow \psi_i(t) := g_{(t,i)} \quad \& \quad \phi = \psi_1^{-1} \sqcup \psi_2^{-1} \sqcup$ resto.

Naranjas vs. Estafas II

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Si fuera paradójico y amenable:

$$\begin{aligned} 1 = \mu(G) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j B_j) \geq \mu(G) + \mu(G) = 2. \end{aligned}$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. No amenable

$\rightsquigarrow$ existe $e \in K \subset G$ con $|KF| \geq 2|F|$

$+$ Hall harem Theorem

$\rightsquigarrow$ etiquetas $\left\{g_{(t,i)}\right\}_{(t,i) \in G \times \{1,2\}}$

$\rightsquigarrow \psi_i(t) := g_{(t,i)}$ & $\phi = \psi_1^{-1} \sqcup \psi_2^{-1} \sqcup$ resto.

Ejercicio: Completar los detalles.

¡Eso es todo, amigos!

¡Muchas tardes y buenas gracias!

¿Preguntas?